

TARTU ÜLIKOOL  
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND  
FÜÜSIKA INSTITUUT

MIKK MIHKEL NURGES

**Kosmoloogilised tihedusparameetrid,  
olekuparameeter ja dünaamiline  
gravitatsioonikonstant leituna Ia-tüüpi  
supernoovade vaatlusandmetest**

BAKALAUREUSETÖÖ (12 EAP)

*Juhendaja:*

PhD Margus SAAL

*Kaitsmisele lubatud:* .....

*Juhendaja:* .....

allkiri, kuupäev

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Üldrelatiivsusteooria ja kosmoloogia standardmodel</b>	<b>5</b>
2.1	Einsteini väljavõrrandid . . . . .	5
2.2	Friedmanni kosmoloogia . . . . .	6
2.3	Universumi energiatihedused . . . . .	9
2.4	Standardmodeli probleemid . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Tumeaine ja tumeenergia</b>	<b>15</b>
3.1	Tumeaine . . . . .	15
3.2	Tumeenergia . . . . .	17
3.3	Rebendid . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG)</b>	<b>20</b>
4.1	Mõjufunktsionaal ja konformne teisendus . . . . .	20
4.2	Brans'i-Dicke'i gravitatsiooniteooria . . . . .	20
4.3	STG Väljavõrrandid . . . . .	21
4.4	Tumeenergia Jordani raamis . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Ia-tüüpi supernoovade vaatlustulemuste analüüs</b>	<b>23</b>
5.1	Ia-tüüpi supernoovad, heleduskaugus ja kaugusmoodul . . . . .	23
5.2	Hindamisprogrammi kirjeldus . . . . .	23
5.3	Parameetrite hindamine ja tulemused . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Arutelu</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Kokkuvõte</b>	<b>30</b>
<b>8</b>	<b>Tänu sõnad</b>	<b>31</b>
	<b>Viited</b>	<b>32</b>

# 1 Sissejuhatus

Aastal 1916 publitseeris Albert Einstein artikli, kus käsitles relativistliku gravitatsiooniteooriat, mida tuntakse nüüd üldrelatiivsusteooriana (ÜRT). Teooria keskne idee on see, et materia kõverdab aegruumi ja selle aegruumi geomeetria omakorda määrab materia liikumise. See dünaamiline tasakaal on kirjeldatav Einsteini väljavõrranditega (vt näiteks [1]). Einstein eeldas, et universum on staatiline, kuid nende väljavõrrandite järgi oleks universum pidanud gravitatsiooni tõttu kokku tõmbuma. Seetõttu täiendas ta aasta hiljem võrrandeid, lisades nn kosmoloogilise konstandi, mis pidi tagama universumi jäämise staatiliseks. Galaktikate liikumisi uurides avastas Edwin Hubble 1929. aastal, et galaktikad eemalduvad meist, mis tähendas, et universum hoopiski paisub, ega ole staatiline [2]. Einstein loobus seetõttu kosmoloogilisest konstandist oma võrrandites ning hiljem kutsus konstandi kasutuselevõttu oma "suurimaks äparduseks".

Algselt oli Einstein arvanud, et tema väljavõrrandid on lahendamatud, kuid juba samal aastal kui Einstein oma üldrelatiivsusteooria (ÜRT) avaldas, suutis Karl Schwarzschild leida Einsteini väljavõrranditele täpse lahendi. Sellele järgnesid mitmed erinevad lahendid Einsteini väljavõrranditele, millest kosmoloogia kontekstis tähtsaim tulemus on Alexander Friedmanni poolt aastal 1922 tuletatud võrrandid ja neile võrranditele leitud lahend [3]. See lahend kirjeldab paisuvat universumi dünaamikat. Lähtudes eeldusest, et universum pidi kauges minevikus olema väga kuum, esitas G. Gamow 1948. aastal varajase universumi tuumasünteesi teooria, millest ta arvutas algse vesiniku ja heeliumi konsentratsioonide suhte [4]. Lisaks ennustas ta, et universum peab olema täidetud kosmoloogilise foonkiirgusega, mis omab musta keha spektrit ning on universumi paisumisel jahtunud. Mikrolaine foonkiirguse avastasid 1964. aastal A. Penzias ja R. Wilson ning teooriat hakati nimetama Suure Paugu teooriaks ja sellest sai kosmoloogia standardmudel (vt näiteks [17], [6]).

Kosmoloogilist konstanti ei unustatud aga ära, see figureeris endiselt isegi Friedmanni võrrandites, lihtsalt pikka aega eeldati selle väärtuseks olevat null. Aastal 1998 analüüsisid Saul Perlmutter'i ja Adam Guy Riess'i juhitud töörühmad Ia-tüüpi supernoovade vaatlusandmeid [7], [8] ning järeldasid, et universum mitte ainult ei paisu, vaid teeb seda ka kiirenevalt. Seetõttu, et seda kiirenemist ka standardmudel is kajastada, tuli taaskord võrranditesse kirjutada kosmoloogiline konstant. Kosmoloogiline konstant on üks võimalus kirjeldada maksimaalset tumeenergia energiatihedust. Tumeenergia moodustab eeldatavalt umbkaudu 70% kogu universumi energiatihedusest, samas kui nähtav aine moodustab vaid ligikaudu 5% [15]. Millest koosneb aga ülejäänud 25%? Astronoom Jan Oort postuleeris 1932. aastal, et Linnutee Galakti-

ka peab koosnema rohkemast, kui lihtsalt planeetidest ning tähtedest [16], kuna galaktika äärel asetsevad tähed liiguvad ümber galaktika keskme kiiremini, kui peaks olema võimalik, ilma et nad galaktikast välja paiskuksid. See tähendas, et galaktikas peab olema rohkem materiat, kui on näha. Hiljem tumeaineks tituleeritud materia ongi see ülejäänud 25% universumi energiatihedusest, mis ka tähti galaktikas koos hoiab. Standardmudeli aluseks olevates Friedmanni võrrandites kirjeldab aegruumi geomeetria kõveruse parameeter  $k$ , mis määrab, kas universumi geomeetria on suletud, avatud või tasane. Hetkel näitavad vaatlustulemused [18] [15], et selle parameetri väärtus on  $k = 0$  ehk universumi geomeetria on tasane. Täielikult ei saa välistada ka sfäärilise või hüperboolse geomeetriaga universumit, aga käesolevas töös on eeldatud, et universumi geomeetria on tasane.

Kuigi kosmoloogia standardmodel on heas kooskõlas vaatlusandmetega, esinevad siiski probleemid, nagu näiteks niinimetatud tasasuse probleem ehk miks on universumi materia tihedus nõnda lähedane kriitilisele tihedusele [10]? Nende probleemide lahendamiseks tuli eeldada, et pärast algset singulaarsusest väljumist pidi universum eksponentsiaalselt paisuma. Seda protsessi nimetatakse kosmoloogiliseks inflatsiooniks (vt näiteks [13]). Inflatsiooniline paisumine on realiseeritav skalaarvälja  $\phi$  abil, mis liigub oma potentsiaali miinimumi poole ja tekitab vajaliku eksponentsiaalse paisumise. Eksisteerib siiski hilise universumi probleeme, mida inflatsiooniteooria ei lahenda.

Hilise universumi kiireneva paisumise seletamiseks sobib fenomenoloogiliselt kosmoloogiline konstant. Kui algselt mõeldi, et kosmoloogilisele konstandile vastavad vaakumi kvantfluktuatsioonid, siis nii see olla ei saa, sest sellisel juhul oleks universumi kiireneva paisumise tagamiseks vajaliku energiatiheduse ja kvantväljateooriast arvatud fluktuatsioonide energiatiheduse erinevus  $10^{120}$  korda. Seda tuntakse nn kosmoloogilise konstandi probleemina [12]. Osutub, et modifitseerides Einsteini võrrandite materiasektorit ja lisades sinna skalaarvälja liikme, on võimalik saada vaatlustega kooskõlas olev dünaamika. Seda tüüpi teooria modifikatsiooni nimetatakse tavaliselt kvintessentsiks (vt näiteks [9]). Kolmandaks, ja kõige radikaalsemaks lähenemiseks on võimalus, et Einsteini teooria tuleb asendada mõne modifitseeritud gravitatsiooniteooriaga. Üheks selliseks alternatiiviks on skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG) [11]. Seda tüüpi gravitatsiooniteoorias kirjeldab gravitatsioonilist interaktsiooni skalaarväli  $\Phi$ . Üldistatud gravitatsiooniteooria peab piirjuhul sisaldama üldrelatiivsusteooriat ning mehhanismi, mis üldisema teooria üldrelatiivsusteooriaks viiks. Nõnda peavad ka STG kosmoloogia võrrandid piirjuhul üle minema Friedmanni võrranditeks. STG mudeleid ÜRT piiril on

analüüsinud L. Järv, P. Kuus ja M. Saal [14] ning tuletanud tingimused, mille puhul STG mudel läheb üle ÜRT'ks.

Kosmoloogiliste mudelite võrrandites olevate parameetrite väärtused kirjeldavad universumi geometriat ja dünaamikat. Neid väärtusi on aga vahetu mõõtmise kaudu keeruline määrata. Käesolevas töös uurime STG võrrandeid, Friedmanni väljavõrrandeid ja Hubble'i parameetrit erinevates mudelites. Lisaks kasutame Ia-tüüpi supernoovadest kogutud vaatlusandmeid, et leida kosmoloogilised parameetrid, mis oleks kõige paremini kooskõlas vaatlustega, ning võrdleme tulemusi M. Saali ja A. Frantskjavitšiuse poolt leitud tulemustega artiklis [28], kus uuriti ka dünaamilise gravitatsioonikonstandi väärtust.

Käesolevas töös kasutame meetrikat  $(-1, +1, +1, +1)$ . Valguskiirus  $c$  on võetud ühikuliseks, kui pole öeldud teisiti.

#### *Töö eesmärgid:*

- Teha endale piisaval määral selgeks üldrelatiivsusteooria, kosmoloogilised mudelid ja parameetrid, Friedmanni võrrandid ning skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria;
- uurida lähemalt standardmudelit ja selles esinevaid probleeme;
- tutvustada Friedmanni kosmoloogiat;
- tutvustada erinevaid kosmoloogilisi parameetreid;
- uurida skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriat;
- luua programm kosmoloogiliste parameetrite hindamiseks  $\chi^2$ -meetodil;
- kasutades kirjutatud programmi täiendust, hinnata kosmoloogilisi tihedusparameetreid, olekuparameetrit ja dünaamilisist gravitatsioonikonstanti.

## 2 Üldrelatiivsusteooria ja kosmoloogia standardmudel

### 2.1 Einsteini väljavõrrandid

Einsteini üldrelatiivsusteooria (ÜRT) kohaselt gravitatsioon realiseerub (materias ja energiast tingitud) aegruumi kõverdumise tõttu. See fundamentaalne seos materia ja aegruumi kõveruse vahel on kirjeldatud Einsteini väljavõrrandite kaudu. Järgnevalt tuletame need võrrandid matemaatiliselt, sarnaselt sellega, kuidas oli need tuletanud 1915. aastal David Hilbert [5].

Võtame alustuseks Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right], \quad (1)$$

kus  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  on meetrilise tensori determinant,  $R$  on Ricci skalaar,  $\mathcal{L}_M$  on materjavälju sisaldav liige ning  $\Lambda$  on kosmoloogiline konstant. Konstandis  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$  on  $G$  Newtoni gravitatsioonikonstant. Integreerimispiirkond on üle kogu aegruumi.

Vähima mõju printsiip väidab, et mõju varieerimisel liigub süsteem mööda trajektoori, mille korral mõju on ekstremaalne ehk mõju variatsioon on null. Seega, vähima mõju printsiibist ( $\delta S = 0$ ) lähtudes ning varieerides pöördmeetrika kontravariantsete komponentide  $g^{\mu\nu}$  järgi, saame:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = \\ &= \int \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \left( R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - 2\Lambda \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} - 2\sqrt{-g} \frac{\delta \Lambda}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (2)$$

Kuna see võrdus peab kehtima iga  $\delta g^{\mu\nu}$  variatsiooni korral, siis on kandilistes sulgudes asuv osa võrdne nulliga. Seega,  $\sqrt{-g}$  'ga läbi jagades:

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{2\Lambda}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} - 2 \frac{\delta \Lambda}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3)$$

Leiame nüüd, millega võrdub iga liige. Esimese ning kolmanda liikme jaoks on võimalik meetrika definitsiooni variatsioon esitada kujul:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (4)$$

Asendades võrrandi (4) esimesse ning kolmandasse liikmesse, saame

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}, \\ \frac{2\Lambda}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \Lambda g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ricci skalaari definitsiooni ( $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ) kasutades saame teise liikme jaoks

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} , \quad (6)$$

kus eelviimase võrduse teine tegur on täisdiferentsiaal ning ei osale väljavõrrandis, mistõttu Stokes'i teoreemi tõttu võib selle lugeda nulliks.

Neljas liige kaob ära, sest kosmoloogiline konstant ei sõltu kontravariantsetest komponentidest. Viies liige on definitsiooni kohaselt võrdeline energia-impulsi tensoriga:

$$- \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} . \quad (7)$$

Seega, asendades võrrandid (5), (6) ja (7) võrrandisse (3), saame Einsteini väljavõrrandid:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} . \quad (8)$$

Kui Ricci tensor ning skalaar võtta kokku ühiseks liikmeks, saame väljavõrrandite tuntud kuju, kus Einsteini tensor  $G_{\mu\nu}$  kirjeldab aegruumi geomeetriat:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (9)$$

Lihtsana tunduv valem esitab tegelikkuses kuusteist võrrandit. Tensorite sümmeetriate tõttu jääb järele neist kümme sõltumatut võrrandit ning Bianci identsus

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (10)$$

lisab veel neli täiendavat seost. Järelejäänud kuus võrrandit on mittelineaarsed ning seetõttu pole nende lahenditele võimalik rakendada superpositsiooni printsiipi.

## 2.2 Friedmanni kosmoloogia

### 2.2.1 Kosmoloogiline printsiip ja FLRW meetrika

Kosmoloogia standardmudel baseerub kosmoloogilisel printsiibil, mis ütleb, et piisavalt suures mastaabis (vähemalt suurusjärgus 100 megaparsekit) on aine jaotatud universumis homogeenselt ja isotroopselt. Homogeensus tähendab, et universum on igas ruumipunktis samasugune ning isotroopsus tähendab, et universum on igas suunas samasugune. Kosmoloogiline printsiip on kooskõlas Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrikaga (FLRW), mis kirjeldab universumi geomeetriat.

Teame, et Eukleidilises geomeetrias on meetrika antud Pythagorase teoreemi üldistusena:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (11)$$

kus  $ds^2$  on infinitesimaalne kaugus kahe ruumipunkti vahel. Kuigi ka FLRW meetrika üldkuju on küll tuletatav ruumi homogeensusest ning isotroopsusest, tuleb valemisse (11) lisada kolm täiendust. Esiteks, ÜRT's tuleb aega ja ruumi vaadelda ühtse aegruumina. Teiseks, kuna universum ei ole staatiline, siis tuleb sisse tuua mastaabikordaja  $a(t)$ . See suurus on kosmoloogilise aja  $t$  funktsioon, mis kirjeldab kahe ruumipunkti suhtelise kauguse muutumist ajas ning on pikkuse dimensiooniga. Lisaks võib ruum olla kõver, mida iseloomustatakse suurusega  $k = \{0, \pm 1\}$ , mis on tuntud kui kõveruse parameeter. Seega sfäärilistes koordinaatides on FLRW meetrika esitatud järgnevalt:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right]. \quad (12)$$

Suurus  $r$  on koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat.

### 2.2.2 Aegruumi geomeetria

FLRW meetrika valemis (12) olev kõverusparameeter  $k$  määrab ära universumi ruumigeomeetria. Kirjeldame järgnevalt kõverusparameetri kahe-dimensionaalsed juhud, kuigi tegelikult aegruum on nelja-dimensionaalne.

Kui  $k = +1$ , siis on tegu sfäärilise geomeetriaga. See tähendaks, et kui universumit kujutada ette justkui sfääri, mille pinnale joonestada kolmnurk, siis selle kolmnurga sisenurkade summa oleks suurem kui  $180^\circ$ . Ühtlasi tähendaks  $k$  positiivne väärtus seda, et kui hakata ühes suunas liikuma, siis jõutakse lõpuks tagasi samasse punkti, kust alustati. Seega, universum oleks lõpliku suurusega.

Kui  $k = -1$  oleks universumil hüperboolne geomeetria. Sellisel juhul oleks universum justkui sadul, mille peale kolmnurka joonestades tuleks kolmnurga sisenurkade summa väiksem kui  $180^\circ$  ning universum oleks lõpmatult suur, kuna paralleelsed jooned ei ristuks omavahel kunagi.

Universum oleks aga tasane ehk Eukleidilise geomeetriaga (joonestatud kolmnurga nurgad annaksid kokku  $180^\circ$ ), juhul kui  $k = 0$ . Ka sel puhul tähendaks see, et universum on lõpmatult suur.

### 2.2.3 Friedmanni võrrandid

Kuigi kosmoloogia põhivõrrandite täieliku tuletamise jaoks on tarvis Einsteini väljavõrrandeid ning FLRW meetrikat, näitame siin ühe võrrandi tuletuskäigu lähtudes Netwoni mehaanikast, mis on esitatud raamatus [6].



Võtame ühtlase paisuva keskkonna, milles asuvad vaateleja ning vaatejast kaugusel  $r$  punkt-mass  $m$ . Seega vaateleja ümber asuva sfääri mass, raadiusega  $r$ , avaldub kui  $M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$ , kus  $\rho$  on energiatihedus. Gravitatsiooniline vastastikmõju avaldub järgnevalt:

$$F = \frac{GMm}{r^2} . \quad (13)$$

Sellest saame leida osakese gravitatsioonilise potentsiaalse energia, kus asendame sfääri massi:

$$U = - \int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \frac{GMm}{r} = - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3} . \quad (14)$$

Osakese kineetiline energia on

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} . \quad (15)$$

Siin on punktiga tähistatud ajalist tuletist. Energia jäävuse seadusest saame osakese koguenergiaks järgneva konstandi:

$$E = T + U = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3} . \quad (16)$$

Kuna universum on homogeenne, siis võib laiendada valemit (16) igale kahe osakesega süsteemile. Seega võib üle minna kaasasliikuvate koordinaatide koordinaadisüsteemile, millega on antud osakeste vaheline tegelik kaugus  $\vec{r}$  ning algne fikseeritud kaugus  $\vec{x}$ :

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} . \quad (17)$$

Siin  $a(t)$  on peatükis (2.2.1) juba mainitud mastaabikordaja, mis kirjeldab kahe ruumpunkti suhtelise kauguse muutumist ajas.

Koguenergia on seega

$$E = \frac{m\dot{a}^2 x^2}{2} - \frac{4\pi Gm\rho a^2 x^2}{3} . \quad (18)$$

Korrutades mõlemat poolt  $\frac{2}{ma^2 x^2}$  ga, valides  $k \equiv -\frac{2E}{mx^2}$  ning meenutades peatükist (2.1), et  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ , saame ühe Friedmanni võrrandi:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} , \quad (19)$$

kus  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  on Hubble'i parameeter.

Teise võrrandi saamiseks kasutame Einsteini väljavõrrandeid (8). Standardmudel is käsitletakse mateeriat kui ideaalset vedelikku ning selle energia-impulsi tensor on avaldatav kujul:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (20)$$

kus  $\rho$  on energiatihedus,  $p$  on rõhk ja  $U_\mu$  on nelikiirus. Kasutades ka eeldust, et aegruumi geometria on kirjeldatav FLRW meetrikaga, saame kosmoloogia põhivõrrandid koos kosmoloogilise konstandiga järgnevad:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (21)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (22)$$

Võrrandit (21) nimetatakse Friedmanni seosevõrrandiks ning võrrandit (22) dünaamiliseks võrrandiks või Friedmanni kiirendusvõrrandiks. Diferentseerides esimest võrrandit, et saada  $\dot{H}$  ja asendades selle ning  $H^2$  teise võrrandisse, saame pidevuse võrrandi

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (23)$$

See on ühtlasi ka energia jäävuse seadus.

## 2.2.4 Hubble'i parameeter

Hubble'i parameeter  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  kirjeldab aegruumi paisumise kiirust. Eksperimentaalselt on seda võimalik mõõta, mõõtes objekti poolt kiiratud valguse punanihet. Punanihe on seotud mastaabikordajaga vastavalt võrrandile

$$1 + z = \frac{\lambda_k}{\lambda_m} = \frac{a(t_k)}{a(t_m)}, \quad (24)$$

kus  $z$  kirjeldab punanihet,  $\lambda_k$  ja  $\lambda_m$  on vastavalt kiiratud ning mõõdetud lainepikkused ning  $a(t_k)$  ja  $a(t_m)$  on vastavalt kiirguse kiirgamise ja mõõdetud ajahetkedel olnud mastaabikordajate väärtused.

*ESA Planck Surveyor* uurimissateliidi poolt aastatel 2009 - 2015 kogutud kosmilise taustkiirguse andmete põhjal loetakse käesoleval hetkel Hubble'i parameetri väärtuseks [15]

$$H_0 = 67.74 \pm 0.46 \frac{km}{s \cdot Mpc}. \quad (25)$$

## 2.3 Universumi energiatihedused

### 2.3.1 Barotroopne olekuvõrrand ja tihedusparameeter

Ideaalse vedeliku korral saame siduda rõhu ning energiatiheduse barotroopse olekuvõrrandiga [20]:

$$w = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \quad (26)$$

kus  $w$  on barotroopne indeks, mis on dimensioonitu suurus. Barotroopne indeks iseloomustab erinevaid ainekomponente. Mitterelativistliku aine (kosmilise tolmu) korral oleks  $w = 0$ , kiirguse ja neutriinode korral  $w = \frac{1}{3}$  ning  $\lambda$  korral  $w = -1$ . Asendades selle vörrandisse (23), saame vördelise seose mastaabikordaja ning energiatiheduse vahel:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(w+1)} , \quad (27)$$

kus  $\rho_0$  on energiatihedus hetkel  $t_0$ . Kui eeldada, et universum on tasane ( $k = 0$ ), siis saame avaldada kriitilise tiheduse:

$$\rho_{kr} = \frac{3H^2}{8\pi G} . \quad (28)$$

Tuleb meeles pidada, et kuna Hubble'i parameeter on funktsioon ajast, siis sõltub ka kriitiline tihedus ajast. Siit saame avaldada dimensioonitu tihedusparameetri:

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_{kr}} . \quad (29)$$

Asendades tihedusparameetri Friedmanni vörrandisse (21), saame

$$\Omega - 1 = \Omega_k , \quad (30)$$

kus  $\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$  on kõverusele vastav tihedusparameeter. Sarnaselt on defineeritud ka kosmoloogilise konstandi või tumeenergia tihedusparameeter, mis on samuti ajast sõltuv (kuigi kosmoloogiline konstant ei ole),

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (31)$$

ning aine tihedusparameeter, mis koosneb tumeainest ( $\Omega_t$ ), barüonainest ( $\Omega_b$ ) ning relativistlikust aine (kiirgus, neutriinod), mille mõju loetakse tühiselt väikeseks:

$$\Omega_M = \Omega_t + \Omega_b . \quad (32)$$

Tihedusparameetrite väärtused praegusel hetkel on *Plancki* mõõtmisandmetel järgnevad [15]:

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda &= 0.6911 \pm 0.0062 , \\ \Omega_M &= 0.3089 \pm 0.0062 . \end{aligned} \quad (33)$$

Kõverusele vastav tihedusparameetri väärtus  $\Omega_k$  on lähedane nullile.

Parametriseerides olekuvörrandi kui

$$w(z) = w_0 + w_1[z/(1+z)] \quad (34)$$

ning kasutades kosmoloogilise punanihke ja mastaabikordaja vahelist seost (24), saab Friedmanni seosevõrrandi (21) kirjutada kujul

$$H(z) = H_0 \sqrt{\left( \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda \left[ (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(\frac{-3w_1 z}{1+z}\right) \right] + \Omega_k (1+z)^2 \right)} . \quad (35)$$

Erinevaid parametrizeeringuid uurime lähemalt peatükis (5.2.1).

### 2.3.2 Universumi vanus

Kui eeldada, et universum on paisunud Suurest Paugust alates, siis on võimalik arvutada välja universumi vanus, kasutades mastaabikordajat ning tihedusparameetreid. Kirjutame Friedmanni võrrandid kujul

$$\dot{a}^2 = H_0^2 (\Omega_{M,0} a^{-1} + \Omega_{\Lambda,0} a^2) . \quad (36)$$

Lahendades võrrandi mastaabikordaja  $a(t)$  suhtes:

$$a(t) = \left( \frac{1}{2} \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \left( \cosh \left[ \sqrt{9H_0^2 \Omega_{\Lambda,0}} (t - t_s) \right] - 1 \right) \right)^{\frac{1}{3}} , \quad (37)$$

kus  $t_s$  on ajahetk, millal mastaabikordaja väärtus on null ehk siis niiöelda universumi alghetk. Kuna universum on tasane, siis praegusel hetkel peab mateeria- ja tumeenergia tihedusparameetrite vahel kehtima seos

$$\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1 \quad (38)$$

ja seetõttu saame ühe parameetri asendada. Arvestades, et praegusel hetkel mastaabikordaja  $a(t) = 1$ , siis saame avaldada universumi vanuse jaoks:

$$T = t_0 - t_s = \frac{1}{3H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \cosh^{-1} \left( 2 \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{1 - \Omega_{\Lambda,0}} + 1 \right) . \quad (39)$$

### 2.3.3 Kosmoloogilised kaugused

Suuri kaugusi on võimalik kindlaks määrata, mõõtes tähtedelt meieni jõudva valguse heledusi ja lainepikkusi. Tähtedelt meile jõudvat heledust nimetatakse näivaks heleduseks, mis avaldub tõelise heleduse  $L$  ning omakauguse  $d_0$  kaudu järgnevalt:

$$l = \frac{L}{4\pi d_0^2} , \quad (40)$$

kus omakaugus on arvutatav

$$d_0 = a_0 \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (41)$$

Siin  $a_0$  on mastaabikordaja hetkel  $t_0$ ,  $r$  on objekti kaugus ning  $k$  ruumi kõverus. Sidudes selle Friedmanni seosevõrranditega (21) ja (22) ning võrrandiga (35), on võimalik avaldada heleduskaugus:

$$d_L(z) = \frac{1+z}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{K} \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \right] \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (42)$$

kus  $H(z)$  on antud valemiga (35) ning

$$\mathcal{K} \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \right] = \begin{cases} \sin(\sqrt{|\Omega_k|})x, & \text{kui } \Omega_k < 0; \\ x, & \text{kui } \Omega_k = 0; \\ \sinh(\sqrt{|\Omega_k|})x, & \text{kui } \Omega_k > 0. \end{cases} \quad (43)$$

Juhul kui universumi geomeetria on tasane, ehk siis  $\Omega_k = 0$ , saame heleduskauguse valemit lihtsustada:

$$d_L(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{H_0 \sqrt{\left( \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda \left[ (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(\frac{-3w_1 z}{1+z}\right) \right] \right)}}. \quad (44)$$

See seos heleduskauguse jaoks on aluseks kosmoloogiliste parameetrite hindamisel. Astronoomias kasutatakse heleduskaugust defineerimaks kaugusmoodulit  $\mu_{th} = m - M$  abil, kus  $m$  on näiline tähesuurus ning  $M$  on tõeline tähesuurus:

$$\mu_{th} = m - M = 5 \log_{10}(d_L) - 5, \quad (45)$$

kus  $d_L$  on antud parsekites.

## 2.4 Standardmudeli probleemid

Üldrelatiivsusteooria on heas kooskõlas vaatlusandmetega, kuid siiski esinevad probleemid, mistõttu uurime käesolevas töös ka alternatiivset mudelit peatükis (4). Siinkohal toome välja mõne tähtsama standardmudelis esineva probleemi (kõigi järgnevate varajase universumi probleemide detailsed kirjeldused on olemas artiklis [10]):

### 2.4.1 Varajase universumi probleemid

Järgnevad probleemid on seotud varajase universumiga. Enamus neist on lahendatud inflatsiooniteooriaga, mis kirjeldab universumi eksponentsiaalset paisumist  $10^{-36}$  kuni  $10^{-32}$  sekundit pärast Suurt Pauku [13]. Inflatsiooniline paisumine on realiseeritav skalaarvälja  $\phi$  abil, mis

liigub oma potentsiaali miinimumi poole ja tekitab vajaliku eksponentsiaalse paisumise.

- *Horisondi probleem*

Kosmilisest taustkiirgusest ilmneb, et universum on suurtel mõõtmetel homogeenne ja isotroopne. Taustkiirguse temperatuur erineb universumi eri kohtades vaid kuni  $10^{-5}$ -kordselt. See ei tohiks olla aga võimalik, kuna rekombinatsiooni ajastul, kui universum muutus kiirgusele läbipaistvaks, polnud nähtava universumi kauged punktid põhjuslikult seotud. Seega ei tohiks universumi eri otstes asuvad kiirgused omada niivõrd sarnaseid temperatuure, kuid ometi see nii on.

- *Suuremõõtmeliste struktuuride probleem*

Vastupidiselt horisondi probleemile on probleemiks ka universumis valitsev anisotropia. Kuidas on homogeenses universumis formeerunud galaktikad ning galaktikate klastrid, mis on lausa suurusjärgus 100Mpc? See eeldaks, et universumi alguses olid siiski mingi korrapäratused. Üks lahendus probleemile on tumeaine, millest ka käesolevas töös juttu tuleb.

- *Tasasuse probleem*

Tasasuse probleem on tegu niiöelda täppishäällestusega. Peatükis (2.2.2) kirjeldasime aegeumi geometriat, kus nägime, et tasase ruumi korral  $k = 0$ . Kui eeldada, et universum on praegusel hetkel tasane või peaaegu tasane, siis peaks kõverusele vastav tihedusparameeter olema vahemikus  $-10^{-60} < \Omega_k < 10^{-60}$ . Nii tasasuse kui ka horisondi probleemile pakub lahenduse inflatsiooniteooria, kuid selle täpset mehhanismi käesolevas töös ei kirjelda.

- *Monopoolide probleem*

Varajase universumi paisumisfaasi kirjeldatakse elementaarosakeste teooria raames. Universumi paisudes temperatuur alaneb, osakesed liituvad ning mateeria energiatihedus hakkab domineerima kiirgusliku energiatiheduse üle. Teoreetiliselt oleks selles faasis pidanud tekkima ka stabiilsed massiivsed magnetilised monopoolid. Need monopoolid peaksid olema säilinud tänapäevani, kuid siiani pole neid eksperimentaalselt veel avastatud.

## 2.4.2 Hilise universumi probleemid

Järgnevalt kirjeldame kahte hilise või praeguse universumiga seotud probleemi. Neile võib ühe olulise võimalusena lahendeid otsida alternatiivsetest gravitatsiooniteooriatest.

- *Kosmoloogilise konstandi probleem [6]*

Kosmoloogilist konstanti samastatakse vaakumi energiatihedusega ehk kvantfüüsika järgi kvantfluktuatsioonidest tingitud energiatihedusega. Probleem on aga selles, et osakestefüüsika teooriate järgi peaks kosmoloogiline konstant olema  $10^{120}$  suurusjärku suurem kosmoloogilistest mõõtmistest leitud väärtusest. Probleemi üks võimalik lahend oleks modifitseerida Einsteini võrrandite mateeriasektorit, lisades sinna skalaarvälja liikme. Sellist tüüpi teooria modifikatsiooni tuntakse kui kvintessents, mille kohaselt kosmoloogiline konstant ei ole konstant, vaid aeglaselt varieeruv. Sellisel juhul peab aga leiduma mehhanism, mis viib olukorrani, kus fluktuatsioonid energiatihedusse panust ei anna.

- *Kokkusattumuse probleem [19]*

Universumi algfaasis domineeris kiirguslik energiatihedus ning seejärel hakkas domineerima materia energiatihedus. Huvitav on aga see, et just praegusel ajal hakkab domineerima kosmoloogilise konstandi energiatihedus. Miks praegune hetk on oluline, ei osata veel vastata.

### 3 Tumeaine ja tumeenergia

#### 3.1 Tumeaine

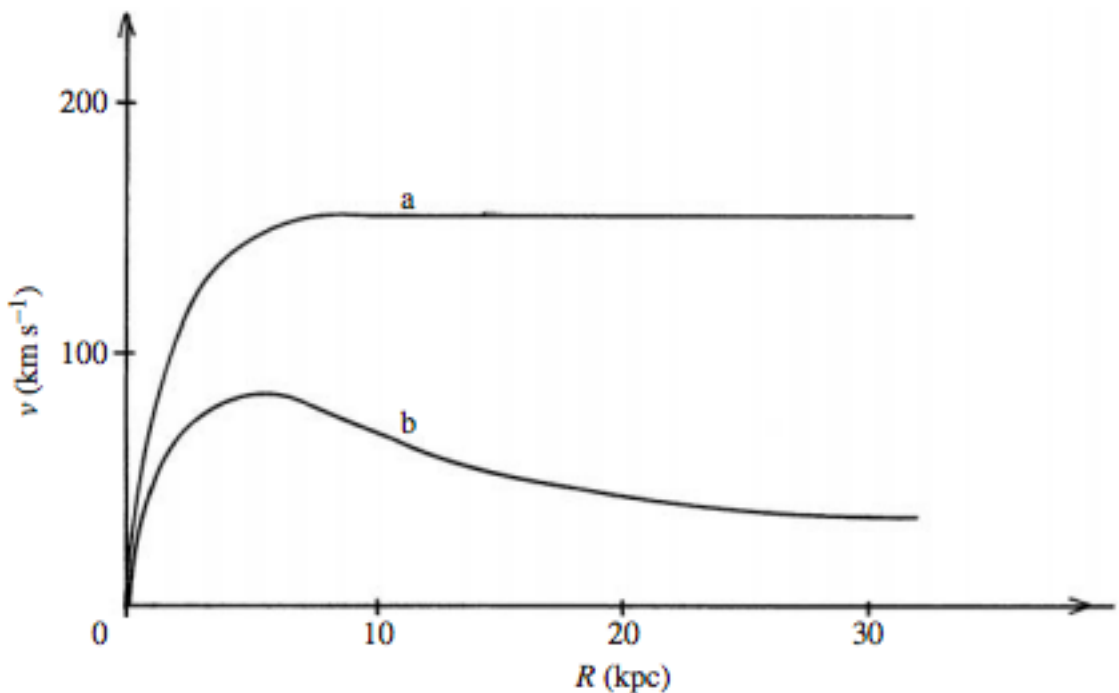
Juba 1932. aastal postuleeris Jan Oort, et Linnutee Galaktika peab koosnema rohkemast kui lihtsalt tähtedest [16]. Kepleri seaduse kohaselt peab tsentrifugaalkiirendus olema kompenseeritud gravitatsioonilise tõmbejõuga, muidu lendaksid galaktikate äärmised tähed galaktikast eemale. See on avaldatav valemiga

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (46)$$

kus  $v$  on tähe kiirus,  $R$  on kaugus galaktika tsentrist,  $M(R)$  on galaktika mass, mis jääb vastava raadiuse sisse, ning  $G$  on Newtoni gravitatsiooniline konstant. Avaldame kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (47)$$

Eeldades, et suurtel vahemaadel jääb galaktika mass umbes konstantseks, saame tähe kiiruse ruutjuursõltuvuse tähe kaugusest galaktika keskmest. Seega tuli see üllatusena, kui Oort avastas, et galaktika äärtel olevad tähed liiguvad kolm korda kiiremini kui peaks olema võimalik, mis tähendas, et galaktikas peab olema kümme korda rohkemat materiat, kui on näha.



**Joonis 1.** Tähtede kiirused galaktikas. a) mõõdetud kiirused b) ennustatud kiirused [17]

Lisaks ei ole võimalik, et nähtav barüonaine hoiaks koos galaktikate klastreid või isegi



suuremaid struktuure. Eespool, peatükis (2.3.1), oli toodud välja materia tihedusparameeter  $\Omega_M = \Omega_b + \Omega_t = 0.3089$ . Samade *Planck*i andmete põhjal on barüonilise aine tihedusparameeter [15]

$$\Omega_b = 0.04861 \pm 0.00014 \quad (48)$$

ning tumeaine tihedusparameeter

$$\Omega_t = 0.25973 \pm 0.0010 . \quad (49)$$

Siit näeme, et tumeaine tihedus on barüonilisest aine tihedusest üle viie korra suurem.

### 3.1.1 Külm tumeaine

Kuid millest koosneb tumeaine? Üheks kandidaadiks on nn külm tumeaine (ingl. kl *Cold dark matter* - *CDM*). Selline tumeaine koosneks osakestest, mis liiguksid aeglaselt võrreldes relativistlike osakestega ning mis interakteeruksid nõrgalt elektromagnetilise kiirgusega. Järgnevad selles alapeatükis kirjeldatavad osakesed on selle töö kirjutamise hetkel veel vaid hüpoteetilised.

- Üks selline osake oleks **aksion**, mis on kerge (suurusjärgus  $10^{-6}$  kuni  $10^{-2}$  eV [17]) pseudoskalaarne boson. Aksioni eeliseks oleks kooskõla CP-sümmeetriaga kvantkromodünaamikas. CP-sümmeetria järgi on osakesele mõjuvad füüsikaseadused samad ka selle osakese anti-osakese jaoks ning anti-osakese ruumikoordinaadid on vahepealse telje suhtes peegeldatud.

- Teine võimalus on **MACHO**'d (ingl. kl *Massive Compact Halo Objects*), mis on suured astronoomilised kehad, nagu mustad augud, neutrontähed, valged kääbused või muud tumedad taevakehad. Kuna MACHO'd on suure külgetõmbejõuga ning raskesti nähtavad, siis on nad üks kandidaat tumeainele.

- Kolmas, üldiselt kõige tõenäolisemaks peetav variant on **WIMP**'d (ingl. kl *Weakly Interacting Massive Particles*) ehk nõrgalt interakteeruvad massiivsed osakesed. WIMP oleks jäänuk varajasest universumist, kui kõik osakesed olid soojuslikus tasakaalus. Varajase universumi kõrgetel temperatuuridel toimus kõigi osake-antiosake paaride vahel annihileerumisi ning osakeste arv langes eksponentsiaalselt. Osakeste interakteerumise ristlõige määrab aga ära osakeste minimaalse tiheduse, kus veel annihileerumisi toimub ja teooria järgi on WIMP'l väiksem interakteerumise ristlõige kui barüonaine osakestel. Seetõttu lõppesid tumeaine-antitumeaine vahelised interaktsioonid enne barüonainet ning seega jäi tumeaine tihedus kõrgemaks barüonaine tihedusest.

Külm tumeaine on ka eelduseks  $\Lambda$ CDM mudelile, mida loetakse tihtipeale kosmoloogia standardmodeliks.

### 3.1.2 Leige ja kuum tumeaine

Kuum tumeaine koosneks ultrarelativistlikul kiirusel liikuvatest osakestest. Üks näide oleks neutriinod, mis moodustaksid tumeaine, kuna neid on raske detekteerida. Siiski, neutriinode hulk universumis on liiga väike, et need saaks moodustada tumeaineks vajaliku tiheduse.

Leige tumeaine on osakeste kiiruste mõttes kuuma ning külma tumeaine vahepealne. See koosneks steriilsetest neutriinodest ning gravitonide supersümmeetrilistest partneritest gravitiinodest. Kuid ka see teooria on ebatõenäoline, sest üldiselt nende osakeste asemel moodustuvad WIMP'd.

## 3.2 Tumeenergia

Nähtav ehk barüonaine moodustab umbes 5% universumi energiatihedusest, tumeaine umbes 26% ning kiirgus moodustab tühiselt väikese osa. Ülejäänud kaks kolmandiku energiatihedusest peaks aga  $\Lambda$ CDM mudeli kohaselt olema kvantfluktuatsioonidest tingitud energia ehk vaakumi energia. See energia oleks jaotatud ühtlaselt üle universumi ning energia-materia ekvivalentsist saab järeldada, et tumeenergial on ka gravitatsiooniline mõju.

### 3.2.1 Kosmoloogiline konstant, kvintessents ja fantoomenergia

Peatükist (2.3.1) näeme, et kosmoloogilisele konstandile vastava barotroopse indeksi korral ( $w_{te} = -1$ ) on tumeenergial negatiivne rõhk ja see kiirendab universumi paisumist:

$$w_{te} = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \Rightarrow p = -\rho . \quad (50)$$

Hubble'i parameetriga liige kaob ära, sest kosmoloogiline konstant on ajas muutumatu, seega  $\dot{H} = 0$ .

Kuid juhul, kui tumeenergia on dünaamiline ehk ajas muutuv, saab rõhu ja tiheduse avaldada skalaarvälja  $\phi$  kaudu [21]:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (51)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (52)$$

kus  $V(\phi)$  on skalaarväljast sõltuv potentsiaal. Barotroopne indeks avaldub, kui

$$w_{te} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} . \quad (53)$$

Sellist tumeenergiat, mille korral  $\dot{\phi} < V(\phi)$ , kutsutakse kvintessentsiks. Näeme, et sellisel juhul peab kehtima  $w_{te} > -1$ . Selleks, et saada  $w_{te} < -1$  ehk fantoomenergiat on võimalik muuta skalaarvälja mõjufunktsionaali nõnda [22], et barotroopne indeks avaldub kujul

$$w_{te} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)} . \quad (54)$$

Sellisel juhul universumi energiatihedus kasvaks ajas, mis viiks Suure Rebendini.

### 3.3 Rebendid

Kuni tumeenergia on domineeriv energialiik universumis, jätkab universum paisumist. Paisumise tõttu mõjuks mingist massiga  $m$  struktuurist kaugusel  $l$  olevale vaatlejale inertsiaalne jõud [23]

$$F_{in} = ml \frac{\ddot{a}}{a} = ml \left( \dot{H} + H^2 \right) . \quad (55)$$

Kui kaks osakest on seotud jõuga  $F_0$ , mis on väiksem kui  $F_{in}$ , siis nende vaheline seos katkeb. Seda protsessi, kui seotud süsteemid lagunevad, nimetatakse kosmiliseks rebendiks. Selleks, et universumi paisudes selline lagunemine tekiks, ei tohi energiatihedus ajas väheneda.

Juhtu, kui Hubble'i parameeter  $H(t) = konst$  teame juba kosmoloogilise konstandi stsenaariumina, kuid see on tuntud ka kui de Sitteri mudel. Kui aga Hubble'i parameeter kasvab ajas monotoonselt, siis on võimalikud erinevad rebendid [24]:

- Suur rebend, mille korral kõik seotud struktuurid, kaasa arvatud aegruum, rebenevad

$$H(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_s < \infty . \quad (56)$$

- Väike rebend, mille korral seotud struktuurid rebenevad, kuid aegruum jääb alles

$$H(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty . \quad (57)$$

- Pseudorebend, mille korral teatud seotud struktuurid rebenevad, olenevalt mudeli inertsiaaljõust (55)

$$H(t) \rightarrow H_{max} < \infty, \quad t \rightarrow \infty . \quad (58)$$

Kui Hubble'i parameeter ei kasva monotoonselt, siis jäävad suur ning väike rebend samasuguseks, kuid pseudorebendit peaks täpsemalt analüüsima. Singulaarsuses lõpevaid rebendeid ( $t \rightarrow t_s$ ) on võimalik klassifitseerida ka vastavalt universumi tiheduse ja rõhu arengule [25]:

$$\text{I tüüp} \quad a \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \infty \quad |p| \rightarrow \infty ,$$

$$\text{II tüüp} \quad a \rightarrow a_s \quad \rho \rightarrow \rho_s \quad |p| \rightarrow \infty ,$$

$$\text{III tüüp} \quad a \rightarrow a_s \quad \rho \rightarrow \infty \quad |p| \rightarrow \infty ,$$

$$\text{IV tüüp} \quad a \rightarrow a_s \quad \rho \rightarrow 0 \quad |p| \rightarrow 0 .$$

Siin  $a_s$  ja  $\rho_s$  on vastavalt mastaabikordaja ning tiheduse maksimaalsed väärtused singulaarsuses. Kuigi I tüüpi kutsutakse "suureks rebendiks", sisaldab eespool kirjeldatud rebend (56) kõiki nelja juhtumit. II tüüpi singulaarsust kutsutakse "äkiliseks" rebendiks. Kuna üldjuhul on analüütilised võrrandid suuruste  $a, \rho$  ja  $p$  jaoks Friedmanni võrrandites (21) ja (22) raskesti avaldatavad, siis on otsetarbekam kasutada definitsiooni (56).

## 4 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria (STG)

### 4.1 Mõjufunktsionaal ja konformne teisendus

Skalaar-tensor tüüpi teooriad kasutavad nii skalaar- kui tensorvälja gravitatsioonilise interaktsiooni kirjeldamiseks. Üldine skalaar-tensor tüüpi mõjufunktsionaal on kirjutatav kujul [27]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{A}(\Phi) R - \frac{1}{2} \mathcal{B}(\Phi) (\nabla\Phi)^2 - V(\Phi) \right] + S_m [e^{2\alpha(\Phi)} g_{\mu\nu}, \psi_m] . \quad (59)$$

Siin on sarnaselt Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaalile (1) Ricci skalaar  $R$ ,  $g$  on meetrilise tensori determinant ja  $\kappa^2 = 8\pi G$ .  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, V$  ja  $\alpha$  on skalaarväljast sõltuvad vabad funktsioonid. Teine liige  $S_m$  kirjeldab mateeria mõju.

Meetrikale  $g_{\mu\nu}$  on võimalik teha konformne teisendus, millel oleks kaks funktsionaalset vabadusastet. Defineerides uue meetrika ja skalaarvälja

$$\begin{aligned} \Phi &= f(\bar{\Phi}) , \\ g_{\mu\nu} &= e^{2\gamma(\bar{\Phi})} \bar{g}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (60)$$

mingite funktsioonide  $\gamma$  ja  $f$  jaoks, saab mõjufunktsionaali ümber kirjutada:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \bar{\mathcal{A}}(\bar{\Phi}) \bar{R} - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{B}}(\bar{\Phi}) (\bar{\nabla}\bar{\Phi})^2 - \bar{V}(\bar{\Phi}) \right] + S_m [e^{2\bar{\alpha}(\bar{\Phi})} \bar{g}_{\mu\nu}, \psi_m] . \quad (61)$$

Teisendusel muutuvad aja- ja ruumisarnaste vektorite pikkused, kuid valgusesarnased vektorid jäävad muutumatuks.

Skalaar-tensor teooriates on võimalik mõjufunktsionaal viia sellisele kanoonilisele kujule, et alles jääb vaid kaks vaba funktsiooni. Üks selline valik on kirjeldatud niinimetatud Jordani raamiga, kus  $\alpha = 0$  ja  $\mathcal{B} = 1$ ;  $\mathcal{A}(\Phi)$  ning  $V(\Phi)$  on vabad funktsioonid. Jordani raamis liiguvad vabalt langevad osakesed mööda geodeetilisi jooni. Teine valik on Einsteini raam, kus  $\mathcal{A} = 1$  ja  $\mathcal{B} = 1$ .

### 4.2 Brans'i-Dicke'i gravitatsiooniteooria

Kui tumeenergia energiatihedus on dünaamiline, siis on tarvis Einsteini gravitatsiooniteooriat täiendada. Üks võimalus on kasutada 1961. aastal Robert H. Dicke'i ja Carl H. Brans'i poolt [26] välja pakutud nn Brans-Dicke gravitatsiooniteooriat. See teooria kasutab gravitatsiooni kirjeldamiseks peale energia-impulsi tensori  $T_{\mu\nu}$  ka skalaarvälja  $\Psi$ . Lisaks erineb Brans'i-Dicke'i mõjufunktsionaal ÜRT mõjufunktsionaalist (1) selle poolest, et Ricci skalaar  $R$  on seotud skalaarväljaga ning potentsiaal  $V(\Phi)$  on piirjuht  $V(\Phi) \rightarrow 1$ . Samuti on kineetilise liikme ette

lisatud skalaarväli ning parameeter  $w_{BD}$ , mida saab üldistada skalaarväljast sõltuvaks funktsiooniks  $w(\Phi)$ . STG mõjufunktsionaal Jordani raamis on [28]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Psi R(g) - \frac{w(\Psi)}{\Psi} \nabla^\rho \Psi \nabla_\rho \Psi - 2\kappa^2 V(\Psi) \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \chi_m] , \quad (62)$$

kus  $w(\Psi)$  nimetatakse skalaarvälja seosefunktsiooniks ja  $V(\Psi) > 0$  on skalaarvälja potentsiaal. Tuleb tähele panna, et konstant  $\kappa^2$  pole enam sama, mis Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaalis (1), kuna gravitatsioonikonstant on asendatud dünaamilise skalaarväljaga ning räägitakse efektiivsest gravitatsioonikonstandist  $\frac{\kappa^2}{\Psi}$ . Selleks, et gravitatsioonikonstant oleks positiivne, eeldame  $\Psi > 0$ .

Väljavõrrandid saab tuletada varieerides mõjufunktsionaali (62) meetrika järgi [29]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{\Psi} T_{\mu\nu} + \frac{w(\Psi)}{\Psi^2} \left( \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \Psi \nabla_\alpha \Psi \right) + \frac{1}{\Psi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi - g_{\mu\nu} \square \Psi) - \frac{\kappa^2}{\Psi} g_{\mu\nu} V(\Psi) . \quad (63)$$

Varieerides mõjufunktsionaali (62) skalaarvälja  $\Psi$  järgi, saame skalaarvälja võrrandi avaldada kujul

$$\square \Psi = \frac{\kappa^2}{2w(\Psi) + 3} \left[ T + 2 \left( \Psi \frac{dV(\Psi)}{d\Psi} - 2V(\Psi) \right) \right] - \frac{1}{2w(\Psi) + 3} \frac{dw(\Psi)}{d\Psi} \nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \Psi , \quad (64)$$

kus  $T \equiv T_{\mu\nu}$  on energia-impulsi tensori jälg.

### 4.3 STG Väljavõrrandid

Käsitledes materiat ideaalse barotroopse vedeliku lähenduses ja eeldades, et universum on tasane ( $k = 0$ ) saab FLRW meetrikat kasutades mõjufunktsionaalist (62) tuletada väljavõrrandid [28]:

$$H^2 = -H \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \omega(\Psi) + \frac{\kappa^2 \rho}{\Psi} \frac{1}{3} + \frac{\kappa^2 V(\Psi)}{\Psi} \frac{1}{3} , \quad (65)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -2H \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \omega(\Psi) - \frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} - \frac{\kappa^2}{\Psi} w\rho + \frac{\kappa^2}{\Psi} V(\Psi) , \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} = & -3H\dot{\Psi} - \frac{1}{2\omega(\Psi) + 3} \frac{d\omega(\Psi)}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 + \frac{\kappa^2}{2\omega(\Psi) + 3} (1 - 3w)\rho \\ & + \frac{2\kappa^2}{2\omega(\Psi) + 3} \left( 2V(\Psi) - \Psi \frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \right) . \end{aligned} \quad (67)$$

## 4.4 Tumeenergia Jordani raamis

Kuna Jordani raamis mõjufunktsionaali mateeria osa ei olene skalaarväljast  $\Phi$ , siis kehtib mateeria jaoks energia jäävuse seadus (23):

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0 . \quad (68)$$

Tumeenergia tiheduse  $\rho_{te}$  ja rõhu  $p_{te}$  saab aga defineerida järgnevalt (tuletuskäigu jaoks vaata [30], [31]):

$$\rho_{te} = \frac{3}{\kappa^2} \left( -H\dot{\Psi} + \frac{\dot{\Psi}^2}{6\Psi} w - H^2(\Psi - \Psi_0) \right) + V , \quad (69)$$

$$p_{te} = \frac{3}{\kappa^2} \left( \frac{2}{3}H\dot{\Psi} + \frac{\dot{\Psi}^2}{6\Psi} w + \frac{\ddot{\Psi}}{3} + \left( \frac{2}{3}\dot{H} + H^2 \right) \cdot (\Psi - \Psi_0) \right) - V . \quad (70)$$

Siin  $\Psi_0$  on skalaarvälja väärtus praegusel hetkel  $t_0$ . Sarnaselt Friedmanni võrranditele (21), (22) on võimalik ümber kirjutada seosevõrrand (65) ja dünaamiline võrrand (66) [28]:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3\Psi_0}(\rho_m + \rho_{te}) , \quad (71)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{\Psi_0}(p_m + p_{te}) . \quad (72)$$

Kasutades tumeenergia tiheduse ja rõhu võrrandeid (69), (70) saame avaldada tumeenergia jäävuse sarnaselt eespool näidatud mateeria jäävusele (68):

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0 . \quad (73)$$

## 5 Ia-tüüpi supernoovade vaatlustulemuste analüüs

### 5.1 Ia-tüüpi supernoovad, heleduskaugus ja kaugusmoodul

Arvatakse, et Ia-tüüpi supernoova elutsükel algab üldiselt aeglaselt keerleva valge kääbusena kaksiktähesüsteemis [32]. Ümber teise tähe tiireldes kogub valge kääbus tähelt massi, kuni saavutab Chandrasekhari massi ehk umbes 1.38 Päikese massi. Sellise massi juures kukub valge kääbus iseenda gravitatsiooni mõjul kokku ning suurenenud tiheduse ja rõhu mõjul tõuseb temperatuur tuumas niivõrd palju, et hakkavad aset leidma termotuumareaktsioonid, mille tagajärjel täht plahvatab Ia-tüüpi supernoovana.

Kuna see protsess toimub vaid kindla massi juures, siis selle tõttu on Ia-tüüpi supernoovadel karakteristik heleduskõver, mille pärast on neid kosmoloogias hea kasutada "standardküünaldena". Nende absoluutne heledus maksimumis on üpris konstante. Lisaks on Ia-tüüpi supernoovad piisavalt heledad, mistõttu on neid näha ka kaugetes galaktikates.

Alates 1990. aastatest on tehtud märkimisväärsel arvul Ia-tüüpi supernoovade vaatlusi ning mõõdetud nende punanihkeid. Punanihet kasutades on meil võimalik arvutada kaugusmooduleid ja heleduskaugusi, mille abil hinnata universumi paisumise dünaamikat. Võrreldes vaatlustest kogutud tulemusi teooriaga, on võimalik hinnata ka erinevate kosmoloogiliste parameetrite väärtusi.

### 5.2 Hindamisprogrammi kirjeldus

Käesolevas töös kasutame kosmoloogiliste parameetrite hindamiseks Jacob Moldenhauer'i, Keenan Stone'i, Zeke Shuler'i ja Larry Engelhardt'i poolt kirjutatud vabavaralist programmi *EJS Fitting Cosmological Data Launcher* [34]. Programmi lähtekoodi on modifitseeritud ja täiendatud vastavalt vajadustele.

Lähtekoodi on lisatud erinevad dimensioonitu Hubble'i parameetri arvutamise valemid ning dünaamilise gravitatsioonikonstandi parametrizeerimine. Veel on lisatud  $\chi^2$  funktsiooni vajalikud *for-loop*'id, et programm arvutaks automaatselt  $\chi^2$  etteantud vahemikus parameetrite jaoks. Lisas (vt allpool) on kirjas koodiosad, mis on lisatud nimetatud programmi iseseisvalt. Kasutatud on *Union 2.1* supernoovade andmeid (kättesaadavad *Supernova Cosmology Project* veebileheküljelt [39]), et hinnata universumi energiatihedust, barotroopset indeksit ja efektiivset gravitatsioonikonstanti.

Matemaatilises statistikas on võimalik kasutada  $\chi^2$ -testi töövahendina, et vaatlusandmeid



kasutades leida minimaalsele  $\chi^2$  le vastavad parameetrid. Kui  $\mu_{obs}(z)$  on supernoovade vaatlus-  
test saadud kaugusmoodul ja  $\mu_{th}(z)$  on teoreetiline kaugusmoodul, siis  $\chi^2$  avaldub järgnevalt:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{th}(z_i) - \mu_{obs}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (74)$$

kus  $\sigma_i$  on vaatlusandmete koguviga. Teoreetiline kaugusmoodul on peatükis (2.3.3) antud va-  
lemi (45) täpsem versioon, kus võetakse arvesse, et Chandrasekhari mass sõltub efektiivsest  
gravitatsioonikonstandist  $G_{eff}$ :

$$\mu_{th}(z) = 5 \log_{10}[D_L(z)] + \mu_0 + \frac{15}{4} \log_{10} \frac{G_{eff}(z)}{G_{eff,0}}. \quad (75)$$

Siin  $D_L \equiv \frac{d_L H_0}{c}$  on Hubble'i heleduskaugus ning avaldub dimensioonitu Hubble'i parameetri  
 $E(z)$  kaudu nõnda:

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz' = (1+z) \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz'. \quad (76)$$

$G_{eff,0}$  on gravitatsioonikonstant, kui punanihe  $z = 0$ . Efektiivse gravitatsioonikonstandina ka-  
sutame M. Saali ja A. Frantskjavitšise poolt välja pakutud avaldist [28], mis on inspireeritud  
Li-Zangi tumeenergia parametrizeeringust [35]:

$$G_{eff}(z) = G_{eff,0} \left[ 1 - G_1 \sin \left( \frac{2\pi}{\ln 2} \ln(1+z) \right) \right]. \quad (77)$$

Lisaparameeter

$$\mu_0 = -5 \log_{10} h + 42.38, \quad (78)$$

kus  $h = H_0/100 \frac{km}{s \cdot Mpc}$  on sõltumatu vaatluspunktidest. Täpsema tuletuskäigu lisaparameetrile  
leiab Nesseris'e ja Perivolaropoulos'e artiklist [33].

Kuna  $\mu_0$  on sõltumatu vaatlusandmetest, siis on võimalik  $\chi^2$  minimiseerida  $\mu_0$  suhtes rittaa-  
rendust kasutades [33]:

$$\chi^2 = A - 2\mu_0 B + \mu_0^2 C \quad (79)$$

kus

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i; \mu_0 = 0)]^2}{\sigma^2}, \\ B &= \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i; \mu_0 = 0)}{\sigma^2}, \\ C &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (80)$$

Valemil (79) on  $\mu_0 = B/C$  jaoks miinimum kohal

$$\tilde{\chi}^2 = A - \frac{B^2}{C} . \quad (81)$$

Seega  $\chi^2$  minimiseerimise asemel võime minimiseerida  $\tilde{\chi}^2$ , mida käesolevas töös ongi tehtud.

### 5.2.1 Tumeenergia parametriseerimine

Tumeenergiale on võimalik valida erinevaid parametriseringuid, olenevalt tumeenergia olekuvõrrandist, mis on antud üldiselt kujul

$$w_{te} = w_0 + w_1 f(z), \quad (82)$$

kus  $w_0$  on olekuvõrrandi vaba parameeter  $z = 0$  jaoks ja  $w_1$  on vaba parameeter tumeenergia dünaamika kirjeldamiseks. Nagu juba varem rõhutatud, eeldame siin, et universum on tasane ehk  $\Omega_k = 0$ .

- Chevallier-Polanski-Linder'i (CPL) parametrisatsioon

Chevallier'i ja Polanski [36] ning Linderi [37] poolt välja pakutud olekuvõrrand on kujul

$$w_{te} = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}, \quad (83)$$

millele oleme juba Hubble'i parameetri väärtuse leidnud valemis (35). Programmis kasutame aga mugavuse tõttu dimensioneeritud Hubble'i parameetrit ( $\frac{H(z)}{H_0}$ ), kuna  $H_0$  taanduks välja Hubble'i heleduskauguses niikuinii. Seega, CPL parametrisatsiooni korral on dimensioneeritud Hubble'i parameeter antud kujul

$$E(z, \Omega_M, w_0, w_1) = \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + (1 - \Omega_M) \left[ (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(\frac{-3w_1 z}{1+z}\right) \right]}. \quad (84)$$

Parametrisatsioon (84) töötab hästi kõrgetel punanihetel ning on piiratud, kui  $z \rightarrow \infty$ , kuid kasvab kiirelt juhul kui  $z \rightarrow -1$ .

- Ma-Zhang'i I-tüüpi (MZ I) parametrisatsioon

Ma ja Zhang pakkusid välja kaks mitte-hajuvat parametrisatsiooni [38], millest esimese olekuvõrrand on

$$w_{te} = w_0 + w_1 \left[ \frac{\ln(2+z)}{1+z} - \ln 2 \right]. \quad (85)$$

Näeme, et punanihke kahanedes jõuame piirini  $w(z) \rightarrow w(-1) = w_0 + w_1(1 - \ln 2)$ . Hubble'i parameeter on I-tüüpi parametrisatsiooni jaoks järgnev:

$$E(z, \Omega_M, w_0, w_1) = \sqrt{\Omega_M (1+z)^3} + \sqrt{2^{6w_1} (1 - \Omega_M) \left[ (1+z)^{3(1+w_0+w_1(1-\ln 2))} \right]} \times \\ \times \sqrt{\exp \left[ -3w_1 \left( \frac{2+z}{1+z} \right) \ln(2+z) \right]} . \quad (86)$$

• Ma-Zhang'i II-tüüpi (MZ II) parametrisatsioon

II-tüüpi parametrisatsiooni olekuvõrrand avaldub kujul

$$w_{te} = w_0 + w_1 \left[ \frac{\sin(1+z)}{1+z} - \sin(1) \right] . \quad (87)$$

Sellisel juhul on  $z \rightarrow -1$  korral  $w(z) \rightarrow w(-1) = w_0 + w_1(1 - \sin(1))$ . Hubble'i parameetri väärtus on

$$E(z, \Omega_M, w_0, w_1) = \sqrt{\Omega_M (1+z)^3} + \sqrt{(1 - \Omega_M) \left[ (1+z)^{3(1+w_0-w_1 \sin(1))} \right]} \times \\ \times \sqrt{\exp \left[ 3w_1 \left[ Ci(1+z) - Ci(1) - \left( \frac{\sin(1+z)}{1+z} - \sin(1) \right) \right] \right]} \quad (88)$$

kus integraalne koosinus  $Ci(z)$  on

$$Ci(z) = - \int_z^\infty \frac{\cos z'}{z'} dz' = \gamma + \ln z + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-z)^k}{2k(2k)!} , \quad (89)$$

kus  $\gamma = 0.5772156649...$  on tuntud kui Euler-Mascheron'i konstant. Hindamisprogrammis arvutame summa välja kuni  $k = 32$  liikmeni.

• Li-Zhang'i (LZ) parametrisatsioon

Li ja Zhang'i poolt välja pakutud parametrisatsioon [35]

$$w_{te} = w_0 + w_1 \sin[A \ln(1+z)] , \quad (90)$$

mis võtab arvesse olekuvõrrandi parameetri võimalikud võnkumised punanihete 0 ja 2 vahel. Parameeter  $A$  määrab nende võnkumiste sageduse ning on valitud  $A = \frac{3\pi}{2}$  artiklis [35]. Võrrand (90) on piiratud punanihke -1 juures, kuid võnkesagedus kasvab lõpmatusse punanihke kasvades. Hubble'i parameeter on sellise parametriatsiooni korral

$$E(z, \Omega_M, w_0, w_1) = \sqrt{\Omega_M (1+z)^3} + \\ + \sqrt{(1 - \Omega_M) \left[ (1+z)^{3(1+w_0)} \right] \exp \left[ 3 \frac{w_1}{A} [\cos[A \ln(1+z)] - 1] \right]} . \quad (91)$$

### 5.3 Parameetrite hindamine ja tulemused

Tegime *EJS* programmiga kokku neli erinevat parameetrite hindamist, parametrisatsioonidega CPL, MZ I, MZ II ja LZ. Hindamine käib nõnda, et kõigile uuritavatele parameetritele valitakse mingi vahemik, milles neid hinnatakse ning samm, mille vahemikus liigutakse. Teades parameetrite eeldatavaid väärtusi, valisin vahemikud järgnevalt:

$$\begin{aligned}\Omega_m^{min} &= 0.260, \quad \Omega_m^{max} = 0.320, \\ w_0^{min} &= -0.950, \quad w_0^{max} = -1.050, \\ w_1^{min} &= -0.100, \quad w_1^{max} = 0.100, \\ G_1^{min} &= -0.005, \quad G_1^{max} = 0.005.\end{aligned}$$

Samm oli kõigil parameetritel 0.001.

Lisas (vt allpool) on antud  $\chi^2$  arvutamise täpne kood, kus on näha, et kõigepealt arvutatakse minimaalsete parameetri väärtustega kõigi 580 supernoova jaoks teoreetiline kaugusmoodul, millede abil saab  $\chi^2$  väärtuse. Seejärel tõstetakse  $G_1$  väärtust sammu võrra ning arvutatakse  $\chi^2$  väärtus uuesti. Nõnda tegutsetakse, kuni  $G_1$  saavutab oma maksimaalse väärtuse, misjärel läheb see miinimumi tagasi ning  $w_1$  väärtust tõstetakse sammu võrra. Niiviisi käiakse läbi kõik võimalikud parameetrite kombinatsioonid ning leitakse vähim  $\chi^2$  väärtus.

**Tabel 1.** Parim tulemus iga parametrisatsiooni korral

Parametrisatsioon \ Parameeter	$\Omega_m$	$w_0$	$w_1$	$\tilde{G}_1$	$\chi^2_{SN}/\nu$
CPL	0.285	-1.011	-0.011	-0.002	0.9761
MZ I	0.285	-1.009	0.005	0.002	0,9761
MZ II	0.278	-1.025	0.044	-0.003	0.9761
LZ	0.285	-1.009	0.006	-0.003	0.9761

Tabelis tähistab  $\nu$  vabadusastmete arvu, mis meie mõõtmiste puhul on vabade parameetrite arv lahutatud mõõdetavate supernoovade arvust ( $\nu = 580 - 4 = 576$ ). Näeme, et  $\chi^2/\nu \approx 1$ , nagu peakski tulema [41]. Võrdluseks lisame artiklis [28] saadud minimaalsele  $\chi^2$ 'le vastavate parameetrite väärtused. Nende tulemuste arvutamiseks kasutati sümbolarvutusprogrammi Maple.

**Tabel 2.** Artiklis [28] saadud tulemused

<div> <div>Parameeter</div> <div>Parametrisatsioon</div> </div>	$\Omega_m$	$w_0$	$w_1$	$\tilde{G}_1$	$\chi^2_{SN}/\nu$
CPL	0.280	−1.008	−0.016	0.001	0.9761
MZ I	0.279	−1.007	0.011	0.001	0,9761
MZ II	0.281	−1.012	0.015	0.001	0.9761
LZ	0.289	−0.970	0.158	0.003	0.9760

## 6 Arutelu

Järgnevalt arutleme saadud hindamistulemuste ja töö jätkamise võimaluste üle.

Tabelis 1 leitud väärtustest näeme, et leitud parameetrid sõltusid märgatavalt valitud tumeenergia parametriseringust. On näha, et kolme parametriseringu korral on  $G_1 < 0$  ehk efektiivne gravitatsioonikonstant on kahanev, mis toetab universumi kiirenevat paisumist. Lisaks näeme, et kõigil juhtudel tumeenergia olekuvõrrandi parameeter  $w_0 < -1$ , mis vastab fantoom-energiale. Universumi energiatihedus kasvaks ning kosmiline lõppstsenaarium võiks olla mingit tüüpi rebend (vt täpsemalt peatükk (3.3)). Tuleb aga arvesse võtta mõõtmistulemuste suuri määramatusi (viimased kajastuksid kontuurjoonisel suurte piirkondadena parameetrite standardhälvete jaoks) ning asjaolu, et leidsime vaid minimeeritud  $\chi^2$  väärtuse.

Näeme, et käesolevas töös saadud tulemused on küll lähedased artiklis [28] saadud tulemustega, kuid siiski esinevad erinevused. Erinevused tulevad ilmselt sisse teoreetilise kaugusmooduli erinevatest arvutusviisidest, kuid võivad olla põhjustatud ka erinevate programmide eripäradest ( $\chi^2$  arvutamisel kasutatakse vähemalt kümnendasse komakohta ulatuvaid arve). *Union 2.1* andmete kohta Suzuki *et al* poolt tehtud analüüsiga [40] on tulemusi raskem võrrelda, kuna seal ei kasutatud dünaamilist gravitatsioonikonstanti, ega ka olekuparameetri selliseid parametriseringuid. Fikseeritud  $w_1 = 0$  korral olid  $\Omega_m = 0.281$  ja  $w_0 = -1.011$  [40], mis on siiski üpris lähedased ka käesolevas töös saadud tulemustega.

Kahjuks ei olnud töö kirjutamise hetkel olemas uuemaid supernoovade andmeid kui *Union 2.1* (publitseeritud 2011. aastal). Samas on hetkel käimas mõõtmised Euroopa Kosmoseagentuuri *Planck*'i sateliidiga, mis mõõdab kosmilist taustkiirgust. Nende andmete abil on võimalik anda kosmoloogilistele parameetritele täpsemaid hinnanguid [15]. Lisaks oleks võimalik kombineerida supernoovade, kosmilise taustkiirguse ning barüonide võnkumise vaatlusandmeid, mis võimaldaksid oluliselt kitsendada parameetrite varieeruvust.

## 7 Kokkuvõte

Käesolevas töös tuletasime esmalt Einsteini väljavõrrandid, mille abil saime tuletada Friedmanni väljavõrrandid. Friedmanni võrrandid määrasid Friedmanni kosmoloogia, mida hiljem kasutasime kosmoloogiliste mudelite kirjeldamiseks. Lisaks uurisime Hubble'i parameetrit, mis kirjeldab ruumi paisumist ning mida on võimalik leida tähtedelt meieni jõudva valguse punanihke kaudu. Töö esimeses osas defineerisime ka kosmoloogilised parameetrid, nagu barotroopne indeks ja tihedusparameetrid. Need parameetrid määravad universumi dünaamika, olenevalt kosmoloogilisest mudelist.

Töö teises osas käsitlesime tumeainet ja tumeenergiat, mis eeldatavalt moodustavad ligikaudu 95% kogu universumi energiatihedusest. Kuni tumeenergia on domineeriv energialiik, jätkab  $\Lambda$ CDM mudeli järgi universum kiirenevat paisumist. Kui juhtub, et energiatihedus ajas kasvab, siis võivad tekkida kosmilised rebendid, mille klassifikatsioonidest oli antud alajaotuses juttu.

Kuigi standardmudelit kirjeldav üldrelatiivsusteooria on tehtud vaatlustega heas kooskõlas, on siiski ka standardmudelis lahendamata probleeme, millest mõned said kirjeldatud ka töö esimeses osas. Seetõttu otsitakse standardmudelile alternatiive, millest ühte tutvustasime käesoleva töö kolmandas osas. Selleks on skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria.

Töö viimases osas kasutame *Union 2.1* poolt mõõdetud Ia-tüüpi supernoovade vaatlusandmeid kosmoloogiliste parameetrite hindamiseks. Hinnatakse aine energia tihedust (mis on seotud tumeenergia tihedusega), tumeenergia olekuvõrrandit ning efektiivset gravitatsioonikonstanti. Parameetreid hinnatakse nelja erineva Hubble'i parameetri parametrisatsiooni korral. Hindamine käib programmiga *Easy Java Simulations*, mida modifitseerisime minimaalse  $\chi^2$  leidmise jaoks, lisades ka vajalike parametriseringute arvutamise meetodid. Arutlus saadud tulemuste üle on toodud töö lõpus.

## 8 Tänuõnad

Tahan südamest tänada kõiki, kes aitasid kaasa selle töö valmimisele. Tänan juhendajat Margus Saali, kes suurendas minu huvi relatiivsusteooria ja kosmoloogia vastu juba erirelatiivsusteooria kursustel ning kes aitas pühendumisega kaasa selle töö jaoks vajalike teadmiste omandamisele. Lisaks tänan Andrjus Frantskjavitšiust, kes aitas kaasa hindamisprogrammi valmimisele.



## Viited

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. (San Francisco: W. H. Freeman, 1973), ISBN 978-0-7167-0344-0
- [2] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15** (1929) 168.
- [3] A. Friedman, Z. Phys. **10** (1922) 377 [Gen. Rel. Grav. **31** (1999) 1991].
- [4] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, Phys. Rev. **73** (1948) 803.
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. (July 1972), ISBN-13 978-0471925675
- [6] A. R. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. (John Wiley and Sons Ltd, 2003)
- [7] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], Bull. Am. Astron. Soc. **29** (1997) 1351 [astro-ph/9812473].
- [8] A. V. Filippenko and A. G. Riess, Phys. Rept. **307** (1998) 31 [astro-ph/9807008].
- [9] I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 896 [astro-ph/9807002].
- [10] S. Watson, astro-ph/0005003.
- [11] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar Tensor Gravity*. (Springer Science and Business Media, 2004)
- [12] S. E. Rugh and H. Zinkernagel, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **33** (2002) 663 [hep-th/0012253].
- [13] B. Greene, *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (Vintage Series, Random House Inc., February 2000), ISBN 0-375-70811-1
- [14] L. Jarv, P. Kuusk and M. Saal, Phys. Rev. D **85** (2012) 064013 [arXiv:1112.5308 [gr-qc]].
- [15] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].

- [16] E. Bertschinger, *Dark Matter; Cosmological*, short essay
- [17] M. Roos, *Introduction to Cosmology, Third Edition*. (John Wiley and Sons, Ltd, 2003)
- [18] T. E. Montroy, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, P. Cabella and C. R. Contaldi *et al.*, *Astrophys. J.* **647** (2006) 813 [astro-ph/0507514].
- [19] H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens and W. Zimdahl, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 11, 3160 [arXiv:1410.2509 [astro-ph.CO]].
- [20] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *eConf C* **0602061** (2006) 06 [*Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** (2007) 115] [hep-th/0601213].
- [21] L. D. Ferramacho, A. Blanchard, Y. Zolnierowski and A. Riazuelo, *Astron. Astrophys.* **514** (2010) A20 [arXiv:0909.1703 [astro-ph.CO]].
- [22] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545** (2002) 23 [astro-ph/9908168].
- [23] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, S. Nojiri, S. D. Odintsov and R. J. Scherrer, *Phys. Lett. B* **708** (2012) 204 [arXiv:1108.0067 [hep-th]].
- [24] P. H. Frampton, K. J. Ludwick and R. J. Scherrer, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 083001 [arXiv:1112.2964 [astro-ph.CO]].
- [25] S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 063004 [hep-th/0501025].
- [26] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
- [27] E. E. Flanagan, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 3817 [gr-qc/0403063].
- [28] M. Saal and A. Frantskjavitšius, *J. Phys. Conf. Ser.* **532** (2014) 012025.
- [29] O. Kosheleva, V. Kreinovich, *Brans-Dicke scalar-tensor theory of gravitation may explain time assymetry of physical processes*, 2013
- [30] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet and A. A. Starobinsky, *JCAP* **0609** (2006) 016 [astro-ph/0606287].
- [31] D. F. Torres, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 043522 [astro-ph/0204504].

- [32] *HubbleSite - Dark Energy - Type Ia Supernovae*
- [33] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **72** (2005) 123519 [astro-ph/0511040].
- [34] <http://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=12406>
- [35] H. Li and X. Zhang, Phys. Lett. B **703** (2011) 119 [arXiv:1106.5658 [astro-ph.CO]].
- [36] M. Chevallier and D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. D **10** (2001) 213 [gr-qc/0009008].
- [37] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 091301 [astro-ph/0208512].
- [38] J. Z. Ma and X. Zhang, Phys. Lett. B **699** (2011) 233 [arXiv:1102.2671 [astro-ph.CO]].
- [39] <http://supernova.lbl.gov/Union/>
- [40] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. F. Barrientos and J. Botyanszki *et al.*, Astrophys. J. **746** (2012) 85 [arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO]].
- [41] <http://maxwell.ucsc.edu/drip/133/ch4.pdf> , *Chi-square: Testing for Goodness Fit*

# **Finding cosmological density parameters and the dynamic gravitational constant from type-Ia supernovae observations**

In this paper, we first derived Einstein's field equations, which helped us derive Friedmann's field equations. Friedmann's equations were used to describe different cosmological models through Friedmann cosmology. In addition we scrutinized the Hubble parameter, which gives us the normalized rate of expansion for the universe. In the first part of the paper, we also defined cosmological parameters, such as the barotropic index and density parameters. Depending on the cosmological model, these parameters define the dynamics of the universe.

In the second part, we took a look at dark energy and dark matter, which supposedly make up around 95% of the energy density of the universe. According to the  $\Lambda$ CDM model, the universe will keep expanding at an accelerated rate, as long as dark energy is the dominant form of energy. If energy density does increases, then cosmological rips (of which we also talked in the second section) are possible.

Even though the theory of general relativity, which describes the standard model, is in good accordance with observations, there are still unsolved problems within the standard model. Some of these problems are also described in the first part of this paper. Due to these problems, alternative models are looked for, one of which we took a closer look at in the third section of this paper. An alternative theory is the scalar-tensor gravitational theory.

The final chapter describes, how we used type-Ia supernovae data, collected by *Union 2.1*, to fit cosmological parameters. Parameters being fitted include the energy density of matter (which is dependent of dark energy's density), the dark energy equation of state parameter and the effective gravitational constant. Four different parametrizations were used for parametrising the Hubble parameter. *Easy Java Simulations* is the program used for fitting, which we modified by adding functions for finding the minimized  $\chi^2$  and for necessary parametrizations. Conclusion of results is at the end of the final section.

# Lisa

## Globaalsed muutujad

---

```
double c = 2.998E5;
double zmin = 0.0;
double h = H_0/100.0;
double mu_0 = 0.0;
double Omega_v = 1.0 - Omega_m;
double hc = c/H_0;
long[] factorials = new long[10002];
long[] sums = new long[590];

//The following variables are all defined depending on the
// parametrization
double G1, G1_max, w0, w0_max, wa, wa_max, Omega_m, Omega_max;
```

---

## Dimensioonitu Hubble'i parameetri arvutamine

---

```
public class InverseH implements Function {

    // This is where we define the model of the Universe
    double E;

    public double evaluate(double x) {
        /*
        //CPL
        double wz = 3.0*(1.0 + w0 + wa);
        double we = (-3.0*wa*x)/(1.0 + x);
        double qz = Math.pow((1.0 + x), wz)*Math.exp(we);

        E = Math.sqrt(Omega_m*Math.pow(1.0 + x, 3) + Omega_v*qz);

        //MZ I
        double wz = 3.0*(1.0 + w0 + wa*(1 - Math.log(2.0)));
        double we = (-3.0*wa*(x + 2.0)*Math.log(x + 2.0))/(x + 1.0);
```

```

double qz = Math.pow((1.0 + x), wz)*Math.exp(we);

E = Math.sqrt(Omega_m*Math.pow(1.0 + x, 3) + Omega_v*Math.pow(2,
    6*wa)*qz);

//MZ II
double cs1 = 0.5772156649 + Math.log(1 + x) + sums[snumber];
double cs2 = 0.5772156649 + Math.log(1) + sums[snumber];

double wz = 3.0*(1.0 + w0 - wa*Math.sin(1.0));
double we = 3.0*wa*(cs1 - cs2 - (Math.sin(x + 1.0))/(x + 1.0) +
    Math.sin(1.0));
double qz = Math.pow((1.0 + x), wz)*Math.exp(we);

E = Math.sqrt(Omega_m*Math.pow(1.0 + x, 3) + Omega_v*qz);

*/

//LZ
double wz = 3.0*(1.0 + w0);
double we =
    ((2.0/Math.PI)*wa*(Math.cos((3*Math.PI/2)*Math.log(1.0 + x)) -
    1.0));
double qz = Math.pow((1.0 + x), wz)*Math.exp(we);

E = Math.sqrt(Omega_m*Math.pow(1.0 + x, 3) + Omega_v*qz);

return 1.0/E;

}
}

```

---

### Integraalse koosinuse summaliikme arvutamine

---

```

public void factoring(int n, int k) {

```

```

long fct = 1;
factorials[0] = 1;
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    fct = fct * i;
    factorials[i] = fct;
}

for (snumber = 0; snumber < supernovaedataset.length; snumber++) {
    long sum = 0;
    double x = supernovaedataset[snumber][0];

    //Calculates the cosine integral series
    for (int s = 1; s < k; s++) {
        double top = Math.pow(-Math.pow(x, 2), s);
        double bottom = 2*s*factorials[2*s];
        sum += top/bottom;
    }
    sums[snumber] = sum;
}
}

```

---

### Teoreetilise kaugusmooduli arvutamine

---

```

public double integrate (double mu_0) {
    // This is the integration routine we call for calculating the
    distance modulus
    Function f = new InverseH();

    //Check each possible case of Curvature (Omega_k).
    if(Omega_k == 0) // If curvature is zero
        D_L = (1.0 + z) * Integral.romberg(f, zmin, z, 1000, tol);
    else{ // Otherwise
        double OmegaK_root = Math.sqrt(Math.abs(Omega_k));

        if(Omega_k < 0) // If positive curvature

```

```

        D_L = (1.0 + z) * (1.0 / OmegaK_root) * Math.sinh(OmegaK_root *
            Integral.romberg(f, zmin, z, 1000, tol));
    else // If negative curvature
        D_L = (1.0 + z) * (1.0 / OmegaK_root) * Math.sin(OmegaK_root *
            Integral.romberg(f, zmin, z, 1000, tol));
}

double G_eff = 1 - G1 * Math.sin((2 * Math.PI * Math.log(1.0 +
    x))/Math.log(2));

//Theoretical distance modulus
return 5.0*Math.log10(D_L) + mu_0 + (15/4)*Math.log10(G_eff);
}

```

---

## $\chi^2$ arvutamine

---

```

public void chi_sn() {
    double A;
    double B;
    double C;

    double w0_begin = w0;
    double wa_begin = wa;
    double omega_begin = Omega_m;
    double G1_begin = G1;
    double min_chi = 10000;
    double best_w0 = 0;
    double best_omega = 0;
    double best_G1 = 0;
    double best_wa = 0;

    //Four loops, one for each parameter, that go through values from
        min to max,
    //by the step given
    for (double m = Omega_m; m <= Omega_max; m += 0.001) {

```



```

Omega_m = m;
for (double wi = w0; wi <= w0_max; wi += 0.001) {
    w0 = wi;
    for (double wj = wa; wj <= wa_max; wj += 0.001) {
        wa = wj;
        for (double G_temp = G1; G_temp <= G1_max; G_temp += 0.001) {
            G1 = G_temp;
            diffs_sn = 0.0;
            A = 0;
            B = 0;
            C = 0;

            // Again, a for loop to use the data we read
            for (int i = 0; i < supernovaedataset.length; i++) {

                double xx = supernovaedataset[i][0]; //redshift
                double mu_obs = supernovaedataset[i][1]; //distance modulus
                double error = supernovaedataset[i][2]; //error

                // Now using the redshift data points in our integration
                z = xx;

                // Call the integration
                double mu_th = integrate(0);

                // Compare the difference between distance modulus of theory
                (muth)

                // and the observational distance modulus
                double residual = mu_obs - mu_th;

                A += Math.pow(residual, 2)/Math.pow(error, 2);
                B += residual/Math.pow(error, 2);
                C += 1/Math.pow(error, 2);
                mu_0 = B/C;
            }
}

```

```

diffs_sn = A - Math.pow(B, 2)/C;

    if (diffs_sn < min_chi) {
    min_chi = diffs_sn;
    best_w0 = w0;
    best_omega = m;
    best_G1 = G1;
    best_wa = wa;
    }
    _println("chi sq: " + diffs_sn);
    _println("omega_m: " + m + ", w0: " + w0 + ", wa: " + wa + ",
        G1: " + G1);
    _println("-----");
    }
    G1 = G1_begin;
    }
    wa = wa_begin;
    }
    w0 = w0_begin;
    }
    _println("best chi sq: " + min_chi);
    _println("best omega_m: " + best_omega);
    _println("best w0: " + best_w0);
    _println("best G1: " + best_G1);
    _println("best wa: " + best_wa);
    Omega_m = omega_begin;
}

```

---